

STUDIA METODOLOGICZNE

Jacek BIAŁEK

Uogólnione indeksy agregatowe

Celem artykułu jest prezentacja uogólnionych formuł dla agregatowych indeksów cen oraz analiza ich własności. Ich ogólność wynika z dowolności wyboru wag dla składowych komponentów bądź też z ich sparametryzowanej postaci. W opracowaniu pokazano, że szczególnymi przypadkami omawianych tu ogólnych formuł są znane indeksy statystyczne, takie jak indeks Laspeyresa, Paasche'ego, Fishera, Lexisa i inne. Rozważania teoretyczne zobrazowano przykładem, który pokazuje różnice pomiędzy wartościami indeksów w zależności od przyjętego systemu wag.

Choć pierwsze, nieważone i przez to zbyt uproszczone, formuły indeksów cen znane są już od stuleci (np. Dutot zaproponował swój indeks cenowy w 1738 r., Carli — w 1764 r.), to dopiero koniec wieku XIX dał początek ważonym formułom Laspeyresa i Paasche'ego (von der Lippe, 2007). Jednakże znaczącym krokiem w rozwoju teorii indeksów statystycznych była dopiero praca Irvinga Fishera (1922). Fisher nie był co prawda pierwszym ekonomistą, który stosował tzw. „testy”, czyli postulaty, wobec indeksów statystycznych, ale jako pierwszy zaczął je wykorzystywać przy poszukiwaniu nowych formuł. Efektem poszukiwań była m.in. jego „idealna” (jak ją nazywał) formuła, znana obecnie jako indeks Fishera, określona wzorem:

$$I_F^P = \sqrt{I_{La}^P \cdot I_{Pa}^P} \quad (1)$$

gdzie pod pierwiastkiem znajdują się cenowe indeksy Laspeyresa (I_{La}^P) i Paasche'ego (I_{Pa}^P) (Domański, 2001). Dla rozważanych N składowych agregatu, przy ich cenach z okresu bazowego $\{p_i^s : i = 1, 2, \dots, N\}$ i badanego $\{p_i^t : i = 1, 2, \dots, N\}$ oraz ilościach z okresu bazowego $\{q_i^s : i = 1, 2, \dots, N\}$ i badanego $\{q_i^t : i = 1, 2, \dots, N\}$, indeksy te można wyrazić za pomocą wzorów¹:

$$I_{La}^P(s, t) = \frac{\sum_{i=1}^N q_i^s p_i^t}{\sum_{i=1}^N q_i^s p_i^s} \quad (2)$$

$$I_{Pa}^P(s, t) = \frac{\sum_{i=1}^N q_i^t p_i^t}{\sum_{i=1}^N q_i^t p_i^s} \quad (3)$$

Ogólnie znanym faktem jest to, że indeksy Laspeyresa i Paasche'ego, w przeciwieństwie do indeksu Fishera, nie spełniają podstawowych testów wymaganych od indeksów statystycznych (Białek, 2005; von der Lippe, 2007). Jednakże ich przewagą jest prostota interpretacyjna, której z kolei pozbawiony jest indeks Fishera, choć stanowi ich średnią geometryczną. W artykule, omawiając ogólne formuły indeksów, nie będziemy jednak brali pod uwagę tego kryterium. Okazuje się bowiem, że ogólne formuły dla ustalonych wartości parametrów, od których zależą, mogą prowadzić do indeksów, które posiadają interpretację ekonomiczną, jak i takich, które jej nie mają. Podobnie okazuje się, że szczególne przypadki ogólnych formuł różnią się liczbą testów (aksjomatów), które spełniają.

KLASYFIKACJA INDEKSÓW WG IRVINGA FISHERA

W swojej pracy Pal Köves (1983) przedstawił klasyfikację indeksów według Fishera w postaci trzech tzw. „generacji” indeksów. Pierwszą z nich stanowią indeksy najprostsze, czyli nieważone. Wymienić można tu indeksy Dutot, Carli czy Jevonsa. Formuła indeksu Carli, do której odwołamy się w dalszej części opracowania, jest następująca:

$$I_{Ca}^P = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{p_i^t}{p_i^s} \quad (4)$$

¹ Tylko w razie konieczności rozróżnienia okresu bazowego i badanego będziemy stosowali notację $I^P(s, t)$. W standardowym ujęciu, gdy badany jest okres t , a bazowym s , będziemy pisali krótko I^P .

Druga generacja indeksów to zbiór formuł, jakie otrzymać można poprzez zastosowanie ważonych wersji średniej arytmetycznej, geometrycznej czy harmonicznej z cen p_i^t bądź relacji cenowych p_i^t / p_i^s . Fisher wyróżnił cztery metody ważenia: oparte na okresie bazowym (wagi $p_i^s q_i^s$), badanym (wagi $p_i^t q_i^t$) bądź mieszane (wagi $p_i^s q_i^t$ lub $p_i^t q_i^s$). Do tej grupy indeksów zaliczyć można indeksy Laspeyresa i Paasche'ego.

Trzecią generację indeksów stanowią indeksy, które otrzymać można m.in. poprzez kombinację czy uśrednienie (bez wskazania na konkretny typ średniej) indeksów drugiej generacji. Do tej grupy indeksów należy np. indeks Fishera (1). W dalszej części pracy przedstawimy ogólne formuły indeksów, nawiązując do koncepcji tworzenia indeksów drugiej i trzeciej generacji.

UOGÓLNIONE FORMUŁY INDEKSÓW CEN

Dość naturalnym uogólnieniem indeksu Carli (4) może być formuła

$$I_{G1}^P = \sum_{i=1}^N w_i \frac{p_i^t}{p_i^s} \quad (5)$$

gdzie

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, N\} \quad w_i \geq 0 \quad \text{i} \quad \sum_{i=1}^N w_i = 1 \quad (6)$$

Dla $w_i = w = \frac{1}{N}$ otrzymujemy indeks (4), natomiast przyjmując

$$w_i = \frac{p_i^t q_i^t}{\sum_{k=1}^N p_k^t q_k^t} \quad (7)$$

otrzymujemy w konsekwencji indeks Palgrave'a z 1886 r.

Formuły typu (5), mimo całej swojej prostoty, mają jednak poważną wadę, mianowicie, nie spełniają ważnych postulatów, których wymaga się od „dobrze” skonstruowanego indeksu statystycznego. Wystarczy nadmienić, że tzw. test odwróconego czasu (*time reversal test*) czy test kołowy (*circular test*) nie są tu spełnione (opis głównych testów dla indeksów znajdzie czytelnik np. u Krzysztofiaka i Luszniwicza (1997) oraz Białka (2005). O ile test kołowy² jest poza

² Test kołowy wymaga, aby prawdziwa była relacja: $I^P(s, s+1) \cdot I^P(s+1, s+2) \cdot \dots \cdot I^P(t-1, t) = I^P(s, t)$, gdzie $I^P(s, s+1)$ stanowi indeks cen porównujący okres $(s+1)$ z okresem s . Innym ważnym aksjomatem jest np. test proporcjonalności, który orzeka, że w przypadku gdy $p_i^t / p_i^s = \text{const} = k$, to zachodzi $I^P(s, t) = k$. Wszystkie opisane tu ogólne formuły spełniają test proporcjonalności.

zasięgiem większości stosowanych indeksów statystycznych (nawet „idealny” indeks Fishera nie spełnia tego testu), o tyle test odwróconego czasu jest dość naturalnym wymogiem stawianym indeksom.

Gdyby oznaczyć przez $I^P(s, t)$ — indeks cen traktujący jako bazowy okres s , przez $I^P(t, s)$ — indeks cen traktujący okres t jako bazowy, to test odwracalności w czasie można by zapisać jako następujący postulat:

$$I^P(s, t) \cdot I^P(t, s) = 1 \quad (8)$$

W przypadku formuły (5), bez względu na dobrany system wag, mamy oczywiście:

$$I_{G1}^P(s, t) = \sum_{i=1}^N w_i \frac{p_i^t}{p_i^s} \neq \sum_{i=1}^N w_i \frac{p_i^s}{p_i^t} = I_{G1}^P(t, s) \quad (9)$$

a zatem test odwróconego czasu (8) nie może zostać spełniony.

Uogólnieniem nieważonego indeksu Dutot, którego postać jest następująca:

$$I_{Du}^P = \frac{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N p_i^t}{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N p_i^s} = \frac{\sum_{i=1}^N p_i^t}{\sum_{i=1}^N p_i^s} \quad (10)$$

jest jego ważona wersja:

$$I_{G2}^P = \frac{\sum_{i=1}^N p_i^t w_i^{(1)}}{\sum_{i=1}^N p_i^s w_i^{(2)}} \quad (11)$$

gdzie dodatnie wagi $w_i^{(1)}$, $w_i^{(2)}$ spełniają³:

$$\sum_{i=1}^N w_i^{(1)} = \sum_{i=1}^N w_i^{(2)} = 1 \quad (12)$$

³ W literaturze funkcjonują indeksy statystyczne, których postać ma strukturę jak w formule (11), ale bez ograniczeń z (12). Poza omówionymi indeksami Laspeyresa i Paasche’ego, wymienić można tu indeksy Marshalla i Edgewortha, Walsha czy indeks Geary-Khamisa. Trzy ostatnie indeksy spełniają aksjomat (8).

Przyjmując $w_i^{(1)} = w_i^{(2)} = \frac{1}{N}$ otrzymujemy formułę (10), natomiast przyjmując wagi:

$$w_i^{(1)} = \frac{q_i^t}{\sum_{k=1}^N q_k^t}, \quad w_i^{(2)} = \frac{q_i^s}{\sum_{k=1}^N q_k^s} \quad (13)$$

otrzymujemy postać indeksu Drobischa z 1871 r.:

$$I_{Dro}^P = \frac{\sum_{i=1}^N p_i^t q_i^t / \sum_{k=1}^N q_k^t}{\sum_{i=1}^N p_i^s q_i^s / \sum_{k=1}^N q_k^s} \quad (14)$$

W przypadku ogólnej formuły I_{G2}^P łatwo zauważyć, że aksjomat (8) jest spełniony, jeśli tylko zachodzi $w_i^{(1)} = w_i^{(2)}$ dla wszystkich $i \in \{1, 2, \dots, N\}$. Nie jest to jednak warunek konieczny dla testu odwróconego czasu, a jedynie wystarczający. Zauważmy bowiem, że wagi dobrane w formule (13) są od siebie różne, natomiast oparty na nich indeks Drobischa (14) spełnia test odwróconego czasu.

Kolejna, dość ogólna formuła dla agregatowych indeksów cen może być zapisana jako:

$$I_{G3}^P = \prod_{i=1}^N \left(\frac{p_i^t}{p_i^s} \right)^{w_i} \quad (15)$$

gdzie wagi w_i spełniają założenia (6).

Formuła (15) wyraźnie nawiązuje do funkcji produkcji Cobba-Douglasa. Jej trzy szczególne przypadki stanowią znane w literaturze indeksy:

— dla $w_i^s = \frac{p_i^s q_i^s}{\sum_{k=1}^N p_k^s q_k^s}$ otrzymujemy tzw. logarytmiczny indeks Laspeyresa:

$$I_{Log-La}^P = \prod_{i=1}^N \left(\frac{p_i^t}{p_i^s} \right)^{w_i^s} \quad (16)$$

— dla $w_i^t = \frac{p_i^t q_i^t}{\sum_{k=1}^N p_k^t q_k^t}$ otrzymujemy tzw. logarytmiczny indeks Paasche'ego:

$$I_{Log-Pa}^P = \prod_{i=1}^N \left(\frac{p_i^t}{p_i^s} \right)^{w_i^t} \quad (17)$$

— dla $\bar{w}_i = \frac{1}{2}(w_i^s + w_i^t)$ otrzymujemy indeks Törnqvista (1936):

$$I_T^P = \prod_{i=1}^N \left(\frac{p_i^t}{p_i^s} \right)^{\bar{w}_i} \quad (18)$$

Zauważmy, iż na podstawie (16), (17) i (18) możemy zapisać:

$$I_{Log-La}^P(s, t) = \frac{1}{I_{Log-Pa}^P(t, s)} \quad (19)$$

$$\ln I_T^P = \frac{1}{2}(\ln I_{Log-Pa}^P + \ln I_{Log-La}^P) \quad (20)$$

Można zauważyć, że logarytmiczne indeksy Laspeyresa i Paasche'ego nie spełniają testu odwracalności w czasie (podobnie jak zwykle indeksy Laspeyresa i Paasche'ego). Natomiast z (19) i (20) wynika, że indeks Törnqvista spełnia ten postulat. Istotnie, wobec (20) mamy bowiem:

$$I_T^P = \sqrt{I_{Log-Pa}^P \cdot I_{Log-La}^P} \quad (21)$$

natomiast uwzględniając (19) otrzymujemy:

$$\begin{aligned} I_T^P(s, t) \cdot I_T^P(t, s) &= \sqrt{I_{Log-Pa}^P(s, t) \cdot I_{Log-La}^P(s, t)} \cdot \sqrt{I_{Log-Pa}^P(t, s) \cdot I_{Log-La}^P(t, s)} = \\ &= \sqrt{I_{Log-Pa}^P(s, t) \cdot \frac{1}{I_{Log-Pa}^P(t, s)} \cdot I_{Log-Pa}^P(t, s) \cdot \frac{1}{I_{Log-Pa}^P(s, t)}} = \sqrt{1} = 1 \end{aligned} \quad (22)$$

W pracy Białka (2005) pokazano, że jeśli założyć, iż wagi w_i w formule (15) są funkcjami wag w_i^s oraz w_i^t , to narzucając dla formuły (15) postulaty jednorodności i odwracalności w czasie, uzyskujemy w sposób jednoznaczny formułę Törnqvista (18).

Fisher w swojej teorii indeksów uważał, że rzeczywista wartość indeksu zawarta jest pomiędzy wskazaniem indeksów I_{La}^P i I_{Pa}^P . Zastosował on średnią geometryczną z tych formuł (1). W statystyce funkcjonuje jednak wiele rodzajów średnich, co prowadzi do mniej lub bardziej znanych uogólnień powszechnie stosowanych indeksów.

Przypomnijmy, że dla dwóch wielkości x i y możemy policzyć dla $\alpha \in [0,1]$:

- ważoną średnią arytmetyczną: $\alpha x + (1-\alpha)y$;
- ważoną średnią geometryczną: $x^\alpha y^{1-\alpha}$;
- ważoną średnią harmoniczną: $\frac{xy}{\alpha x + (1-\alpha)y}$;
- ważoną średnią kwadratową: $\sqrt{\alpha x^2 + (1-\alpha)y^2}$;
- ważoną średnią wykładniczą: $\ln[\alpha \exp(x) + (1-\alpha)\exp(y)]$.

Wstawiając w miejsce wielkości x i y wartości indeksów Laspeyresa i Paasche'ego, uzyskujemy następujące ogólne formuły indeksów:

$$I_{G4}^P(\alpha) = \alpha I_{La}^P + (1-\alpha) I_{Pa}^P \quad (23)$$

$$I_{G5}^P(\alpha) = (I_{La}^P)^\alpha (I_{Pa}^P)^{1-\alpha} \quad (24)$$

$$I_{G6}^P(\alpha) = \frac{I_{La}^P \cdot I_{Pa}^P}{(1-\alpha) I_{La}^P + \alpha I_{Pa}^P} \quad (25)$$

$$I_{G7}^P(\alpha) = \sqrt{\alpha (I_{La}^P)^2 + (1-\alpha) (I_{Pa}^P)^2} \quad (26)$$

$$I_{G8}^P(\alpha) = \ln[\alpha \exp(I_{La}^P) + (1-\alpha) \exp(I_{Pa}^P)] \quad (27)$$

Formuła (24) bywa nazywana uogólnionym indeksem Fishera (dla $\alpha = 0,5$ prowadzi do indeksu Fishera określonego w (1). Zauważmy, że zachodzi przy tym:

$$I_{G4}^P(0) = I_{G5}^P(0) = I_{G6}^P(0) = I_{G7}^P(0) = I_{G8}^P(0) = I_{Pa}^P \quad (28)$$

$$I_{G4}^P(1) = I_{G5}^P(1) = I_{G6}^P(1) = I_{G7}^P(1) = I_{G8}^P(1) = I_{La}^P \quad (29)$$

Co więcej, skoro indeks Fishera znajduje się w przedziale o krańcach określonych przez indeksy Laspeyresa i Paasche'ego, to nasuwa się pytanie, czy może być on wyrażony za pomocą innej (niż geometryczna) średniej z tych indeksów? Odpowiedź jest twierdząca — jak pokazał Köves (1983), indeks Fishera można uzyskać jako $I_{G4}^P \left(\frac{I_F^P - I_{Pa}^P}{I_{La}^P - I_{Pa}^P} \right)^4$, otrzymując:

⁴ Zakładamy tu oczywiście, że $(I_{La}^P - I_{Pa}^P) \neq 0$.

$$I_F^P = \frac{I_F^P - I_{Pa}^P}{I_{La}^P - I_{Pa}^P} I_{La}^P + \frac{I_{La}^P - I_F^P}{I_{La}^P - I_{Pa}^P} I_{Pa}^P \quad (30)$$

Podobnie udowodnić można, że zachodzi (dowód pomijamy):

$$I_F^P = I_{G6}^P \left(\frac{I_{La}^P - I_F^P}{I_{La}^P - I_{Pa}^P} \right) \quad (31)$$

$$I_F^P = I_{G7}^P \left(\frac{(I_F^P)^2 - (I_{Pa}^P)^2}{(I_{La}^P)^2 - (I_{Pa}^P)^2} \right) \quad (32)$$

$$I_F^P = I_{G8}^P \left(\frac{\exp(I_F^P) - \exp(I_{Pa}^P)}{\exp(I_{La}^P) - \exp(I_{Pa}^P)} \right) \quad (33)$$

Wprost z formuły (24) otrzymujemy wniosek, że tylko dla $\alpha = \frac{1}{2}$ uogólniony indeks Fishera spełnia test odwracalności w czasie (podobnego wniosku nie można postawić dla pozostałych ogólnych formuł). Mamy bowiem dla dowolnych $p_i^s, p_i^t, q_i^s, q_i^t$:

$$\begin{aligned} I_{G5}^P(s, t) \cdot I_{G5}^P(t, s) &= [I_{La}^P(s, t)]^\alpha \cdot [I_{Pa}^P(s, t)]^{1-\alpha} \cdot [I_{La}^P(t, s)]^\alpha \cdot [I_{Pa}^P(t, s)]^{1-\alpha} = \\ &= \left(\frac{\sum_{i=1}^N q_i^s p_i^t}{\sum_{i=1}^N q_i^s p_i^s} \right)^\alpha \left(\frac{\sum_{i=1}^N q_i^t p_i^t}{\sum_{i=1}^N q_i^t p_i^s} \right)^{1-\alpha} \cdot \left(\frac{\sum_{i=1}^N q_i^t p_i^s}{\sum_{i=1}^N q_i^t p_i^t} \right)^\alpha \left(\frac{\sum_{i=1}^N q_i^s p_i^s}{\sum_{i=1}^N q_i^s p_i^t} \right)^{1-\alpha} = \\ &= \left(\frac{\sum_{i=1}^N q_i^s p_i^s}{\sum_{i=1}^N q_i^s p_i^t} \right)^{1-2\alpha} \cdot \left(\frac{\sum_{i=1}^N q_i^t p_i^t}{\sum_{i=1}^N q_i^t p_i^s} \right)^{1-2\alpha} = \left[\frac{\sum_{i=1}^N q_i^s p_i^s \cdot \sum_{i=1}^N q_i^t p_i^t}{\sum_{i=1}^N q_i^s p_i^t \cdot \sum_{i=1}^N q_i^t p_i^s} \right]^{1-2\alpha} = 1 \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Okazuje się również, że nie tylko indeks Fishera, ale także wiele spośród znanych w literaturze przedmiotu indeksów, można uzyskać poprzez odpowiedni dobór wag dla formuł (23)—(27). Oznaczając przez I_{La}^P, I_{Pa}^Q ilościowe indeksy według formuł Laspeyresa i Paasche'ego można pokazać, że zachodzi:

$$I_{ME}^P = \frac{\sum_{i=1}^N p_i^t (q_i^s + q_i^t)}{\sum_{i=1}^N p_i^s (q_i^s + q_i^t)} = \left(\frac{1}{1 + I_{La}^Q} \right) I_{La}^P + \left(\frac{I_{La}^Q}{1 + I_{La}^Q} \right) I_{Pa}^P \quad (34)$$

co prowadzi do wniosku, że indeks Marshalla i Edgewortha (I_{ME}^P) jest szczególnym przypadkiem formuły (23), tzn.:

$$I_{ME}^P = I_{G4}^P \left(\frac{1}{1 + I_{La}^Q} \right) \quad (35)$$

PRZYKŁAD OBLICZENIOWY

Przykład ograniczymy do prezentacji formuł I_{G4}^P — I_{G8}^P . Założmy, że dla pewnej zbiorowości niejednorodnej uzyskano $I_{La}^P = 0,9$ oraz $I_{Pa}^P = 1,1$. W tabl. 1 podajemy wyniki dla uogólnionych indeksów dla różnych wartości parametru α :

**TABL. 1. WARTOŚCI WYBRANYCH UOGÓLNIONYCH FORMUŁ
W ZALEŻNOŚCI OD PARAMETRU α , W PRZYPADKU GDY $I_{La}^P = 0,9$ ORAZ $I_{Pa}^P = 1,1$**

Formuła indeksu	Wartość parametru α				
	$\alpha = 0,1$	$\alpha = 0,25$	$\alpha = 0,5$	$\alpha = 0,75$	$\alpha = 0,9$
$I_{G4}^P(\alpha)$	1,08	1,05	1,00	0,95	0,92
$I_{G5}^P(\alpha)$	1,07815	1,04618	0,994987	0,946303	0,918243
$I_{G6}^P(\alpha)$	1,07609	1,04211	0,99	0,942857	0,916667
$I_{G7}^P(\alpha)$	1,08167	1,05357	1,00499	0,953939	0,921954
$I_{G8}^P(\alpha)$	1,08171	1,05362	1,00499	0,953873	0,921899

Źródło: opracowanie własne.

Oczywiście wskazania indeksów z tabl. 1 zawarte są w przedziale $[I_{La}^P, I_{Pa}^P] = [0,9; 1,1]$. Traktowany przez wielu autorów jako idealny, indeks Fishera przyjmuje w analizowanym przypadku wartość 0,994987. Równie bliskie jedności są właściwie pozostałe uogólnione indeksy dla $\alpha = 0,5$, z tym że formuły $I_{G7}^P(0,5)$ i $I_{G8}^P(0,5)$ jednomyślnie wskazują na wartość powyżej jedności, natomiast $I_{G5}^P(0,5)$ i $I_{G6}^P(0,5)$ wskazują na wartość poniżej jedności. Ta niewielka asymetria względem średniej arytmetycznej z indeksów Paasche’ego i Laspeyresa⁵ uwidacznia się również w przypadku wyników zawartych w tabl. 2:

⁵ Wynika to z relacji, jakie zachodzą między różnymi rodzajami średnich ważonych.

**TABL. 2. WARTOŚCI PARAMETRU α ,
DLA KTÓREGO OGÓLNE FORMUŁY OSIĄGAJĄ WARTOŚĆ JEDNOŚCI
BĄDŹ WARTOŚĆ INDEKSU I_F^P , W PRZYPADKU GDY $I_{La}^P = 0,9$ ORAZ $I_{Pa}^P = 1,1$**

Formuła indeksu	Parametr α	
	$I_{Gt}^P(\alpha) = 1$	$I_{Gt}^P(\alpha) = I_F^P$
$I_{G4}^P(\alpha)$	0,500	0,5250
$I_{G5}^P(\alpha)$	0,4749	0,5000
$I_{G6}^P(\alpha)$	0,4500	0,4749
$I_{G7}^P(\alpha)$	0,5250	0,5500
$I_{G8}^P(\alpha)$	0,5249	0,5499

Źródło: opracowanie własne.

Rezultaty przedstawione w tabl. 1 i 2 wskazują, że wyniki par indeksów: $I_{G5}^P(\alpha)$, $I_{G6}^P(\alpha)$ oraz $I_{G7}^P(\alpha)$, $I_{G8}^P(\alpha)$ są do siebie bardzo zbliżone, a przy tym są rozłożone symetrycznie względem wskazań formuły $I_{G4}^P(\alpha)$. Pary te wyznaczają ten sam kierunek zmian cen agregatu (przeciętny wzrost lub spadek).

Analizowany przykład dotyczy jednak jednej, konkretnej sytuacji, gdy $I_{La}^P = 0,9$ oraz $I_{Pa}^P = 1,1$. Biorąc za punkt odniesienia „idealny” indeks Fishera $I_{G5}^P(0,5)$ postanowiono sprawdzić, czy podobne relacje powstaną pomiędzy wskazaniem formuły: $I_{G4}^P(0,5)$, $I_{G5}^P(0,5)$, $I_{G6}^P(0,5)$, $I_{G7}^P(0,5)$, $I_{G8}^P(0,5)$ dla różnych wariantów wartości indeksów Laspeyresa i Paasche’ego. Wyniki obliczeń podano w tabl. 3:

**TABL. 3. WARTOŚCI FORMUŁ $I_{G4}^P(0,5)$ — $I_{G8}^P(0,5)$ DLA RÓŻNYCH WARIANTÓW
WARTOŚCI INDEKSÓW I_{La}^P , I_{Pa}^P**

Formuła indeksu	Wariant dla wartości indeksów				
	$I_{La}^P = 0,6$ $I_{Pa}^P = 0,8$	$I_{La}^P = 0,8$ $I_{Pa}^P = 1,1$	$I_{La}^P = 0,7$ $I_{Pa}^P = 1,4$	$I_{La}^P = 1,0$ $I_{Pa}^P = 1,3$	$I_{La}^P = 1,4$ $I_{Pa}^P = 1,7$
$I_{G4}^P(0,5)$	0,70	0,95	1,05	1,15	1,55
$I_{G5}^P(0,5)$	0,6928	0,9380	0,9899	1,1401	1,5427
$I_{G6}^P(0,5)$	0,6857	0,9263	0,9333	1,1304	1,5354
$I_{G7}^P(0,5)$	0,7071	0,9617	1,1068	1,1597	1,5572
$I_{G8}^P(0,5)$	0,7049	0,9612	1,1100	1,1612	1,5612

Źródło: opracowanie własne.

Rezultaty zawarte w tabl. 3 wskazują, że w rozważanej sytuacji wyniki par indeksów: I_{G5}^P , I_{G6}^P oraz I_{G7}^P , I_{G8}^P są do siebie zbliżone i jednocześnie, gdy różnice pomiędzy wskazaniem indeksów I_{La}^P , I_{Pa}^P nie są zbyt duże⁶, zachodzi:

$$I_{G4}^P(\alpha) \approx \frac{1}{4}(I_{G5}^P(\alpha) + I_{G6}^P(\alpha) + I_{G7}^P(\alpha) + I_{G8}^P(\alpha)) \quad (36)$$

Wnioski

Omówione ogólne formuły indeksów agregatowych różnią się między sobą zarówno liczbą testów (aksjomatów), jakie spełniają, jak i wartościami, jakie mogą wskazywać dla konkretnych zestawów cen i ilości (czyli ustalonych wartości indeksów Laspeyresa i Paasche'ego). Jednakże daje się zauważyć pewne podobieństwa we wskazaniach indeksów, wyodrębniając pary indeksów generujących zbliżone do siebie wartości. Warto podkreślić, że nie wszystkie opisane formuły mają interpretację ekonomiczną. A zatem wybór indeksu (bądź jego uogólnionej wersji) powinien być zależny nie tylko od najlepszej wiedzy o własnościach rozważanych miar, ale również od informacji, jakiej od danej miary oczekujemy.

dr inż. Jacek Bialek — Uniwersytet Łódzki

LITERATURA

- Bialek J. (2005), *Indeks Törnqvista jako alternatywa dla idealnego indeksu Fishera*, „Wiadomości Statystyczne”, nr 10, GUS, Warszawa
- Domański Cz., red. (2001), *Metody statystyczne. Teoria i zadania*, Wydawnictwo Uniwersytetu Łódzkiego, Łódź
- Fisher I. (1922), *The Making of Index Numbers*, Boston: Houghton Mifflin
- Fisher F. M. (1972), *The Economic Theory of Price Indices*, Academic Press, New York
- Köves P. (1983), *Index Theory and Economic Reality*, Budapest: Akad. Kiad
- Krzysztofiak M., Luszniwicz A. (1997), *Statystyka*, PWE, Warszawa
- Törnqvist L. (1936), *The Bank of Finland's consumption price index*, „Bank of Finland Monthly Bulletin”, No. 10
- von der Lippe P. (2007), *Index Theory and Price Statistics*, Peter Lang, Frankfurt, Germany

⁶ Relacja ta przestaje obowiązywać, gdy rozważa się skrajne (niewystępujące w rzeczywistości) dysproporcje pomiędzy indeksami cenowymi Laspeyresa i Paasche'ego, np. typu: $I_{La}^P = 0,4$, $I_{Pa}^P = 1,3$. W pozostałych przypadkach, jak pokazały eksperymenty symulacyjne, zachodzi relacja (36).

SUMMARY

The aim of the article is to discuss some general formulae of aggregated price indexes as well as to present their characteristics. Their generality is caused by the discretionary choose of weights for components as well as their parametrized form.

The Author indicates that the well known statistical indexes (Laspeyres, Paasche or Fisher indexes) are specific forms of general formulae. Theoretical considerations are illustrated by a sample indicating relations between discussed indexes.

РЕЗЮМЕ

В статье обсуждаются некоторые обобщенные определения агрегатных индексов цен и представляются их свойства. Обобщение определений вытекает из свободного подбора весов для составных компонентов, а также их параметрического вида.

Статья показывает, что особенными примерами общих определений являются известные статистические индексы, такие, как индекс Ласпейреса, Пааше или Фишера. Теоретические рассуждения показываются на примере соотношений между обсуждаемыми индексами.

SUMMARY

The aim of the article is to discuss some general formulae of aggregated price indexes as well as to present their characteristics. Their generality is caused by the discretionary choose of weights for components as well as their parametrized form.

The Author indicates that the well known statistical indexes (Laspeyres, Paasche or Fisher indexes) are specific forms of general formulae. Theoretical considerations are illustrated by a sample indicating relations between discussed indexes.

РЕЗЮМЕ

В статье обсуждаются некоторые обобщенные определения агрегатных индексов цен и представляются их свойства. Обобщение определений вытекает из свободного подбора весов для составных компонентов, а также их параметрического вида.

Статья показывает, что особенными примерами общих определений являются известные статистические индексы, такие, как индекс Ласпейреса, Пааше или Фишера. Теоретические рассуждения показываются на примере соотношений между обсуждаемыми индексами.